BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Metode Transformasi Diferensial Riccati

Transformasi diferensial diperkenalkan pertama kali oleh Zhou (1986). Definisi dasar dari transformasi diferensial untuk suatu fungsi yang mempunyai turunan dinyatakan sebagai berikut:

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(x)}{dx^k}\right] x = x_0 \quad , k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) memiliki beberapa sifat-sifat sebagai berikut:

1. Sifat Perkalian Dengan Konstanta

   Jika $u(x) = \lambda g(x)$ maka transformasinya adalah $U(k) = \lambda G(k)$ untuk λ konstanta.

2. Sifat Turunan Pertama

   Jika $u(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ maka transformasinya adalah

   $U(k) = (k + 1)G(k + 1)$

3. Sifat Perkalian

   Jika $u(x) = f(x)g(x)$ maka transformasinya adalah

   $$U(k) = \sum_{r=0}^{k} F(r)G(k-r)$$

4. Sifat Fungsi Konstanta

   Jika $u(x) = s$, dengan s adalah suatu bilangan konstanta real, maka transformasinya adalah $U(k) = \delta\ (k) = \begin{cases} s \text{ } jika\ k = 0 \\ 0\ jika\ \ k \neq 0 \end{cases}$

Keempat sifat transformasi diatas digunakan untuk menentukan penyelesaian Persamaan Diferensial Riccati.

2.2 Persamaan Diferensial Riccati

Persamaan diferensial Riccati adalah persamaan diferensial tak linear dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x) \tag{2.2}$$

Solusi persamaan diferensial Riccati bergantung pada fungsi $P(x), Q(x)$ $R(x)$. Penyelesaian persamaan diferensial Riccati dengan metode transformasi diferensial dilakukan dengan mentransformasikan persamaan diferensial Riccati sesuai dengan sifat-sifat transformasi diferensial (Shepley L. Ross, 1966). Menurut Sundari (2014) penyelesaian Persamaan (2.2) menggunakan metode transformasi diferensial yaitu

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \tag{2.3}$$

Aplikasi metode transformasi pada penyelesaian persamaan diferensial Riccati dibuktikan pada contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1

Diketahui persamaan diferensial Riccati:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) + y^2(t) + 2, \qquad y(0) = 0$$

Tentukan solusi persamaan diferensial Riccati diatas untuk $k = 0,1$.

Penyelesaian:

Berdasarkan sifat transfomasi diferensial, diperoleh

1. Tranformasi Diferensial dari $\frac{dy(t)}{dt}$ adalah $(k+1)Y(k+1)$ (sifat 2)
2. Tranformasi Diferensial dari $2y(t)$ adalah $2Y(k)$ (sifat 1)
3. Tranformasi Diferensial dari $y^2(t)$ berdasarkan sifat 3 adalah

$$\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)$$

4. Tranformasi Difrensial dari 2 berdasarkan sifat 4 adalah

$$U(k) = \delta\ (k) = \begin{cases} 2\ jika\ k = 0 \\ 0\ jika\ \ k \neq 0 \end{cases}$$

Sehingga diproleh

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[2Y(k) + \left(\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)\right) + \delta(k)\right] \tag{2.4}$$

Selanjutnya subtitusikan setiap nilai $k = 0{,}1$ pada Persamaan (2.4) diatas menghasilkan nilai berikut.

1. Dalam mencari nilai koefisien pertama dari persamaan hasil penyelesaian persamaan diferensial Riccati dengan mensubtitusikan nilai $k = 0$ pada Persamaan (2.4), maka diperoleh

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[2Y(k) + \left(\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)\right) + \delta(k)\right]$$

$$Y(0+1) = \frac{1}{0+1}\left[2Y(0) + \left(\sum_{r=0}^{0} Y(r)Y(0-r)\right) + \delta(k)\right]$$

$$Y(1) = \frac{1}{1}[2Y(0) + (Y(0)Y(0-0)) + \delta(0)]$$

Dengan mensubtitusikan nilai awal $\mathrm{Y}(0) = 0$ pada Persamaan (2.4), maka diperoleh:

$$Y(1) = 1[2(0) + (0)(0) + 2]$$

$$Y(1) = 1[0 + 0 + 2]$$

$$Y(1) = 1[2]$$

$$Y(1) = 2$$

Sehingga diperoleh nilai koefisien pertama untuk persamaan hasil dari penyelesaian persamaan diferensial Riccati adalah $Y(1) = 2$.

2. Selanjutnya, dalam mencari nilai koefisien kedua dari persamaan hasil penyelesaian persamaan diferensial Riccati dengan mensubtitusikan nilai $k = 1$ pada Persamaan (2.4), maka diperoleh:

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[2Y(k) + \left(\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)\right) + \delta(k)\right]$$

$$Y(1+1) = \frac{1}{1+1}\left[2Y(1) + \left(\sum_{r=0}^{1} Y(r)Y(1-r)\right) + \delta(1)\right]$$

$$Y(2) = \frac{1}{2}[2Y(1) + Y(0)Y(1-0) + Y(1)Y(1-1) + \delta(1)]$$

Dengan mensubtitusikan nilai awal $\mathrm{Y}(0) = 0$ pada Persamaan (2.4), maka diperoleh:

$$Y(2) = \frac{1}{2}[2Y(1) + Y(0)Y(1) + Y(1)Y(0) + \delta(1)]$$

$$Y(2) = \frac{1}{2}[2(2) + (0)(2) + (2)(0) + 0]$$

$$Y(2) = \frac{1}{2}[4]$$

$$Y(2) = \frac{4}{2}$$

$$Y(2) = 2$$

Sehingga diperoleh nilai koefisien pertama untuk persamaan hasil dari penyelesaian persamaan diferensial riccati adalah $Y(2) = 2$.

Berdasarkan perhitungan menghasilkan nilai sebagai berikut:

$Y(1) = 2,\ \ Y(2) = 2$

Sehingga berdasarkan Persamaan (2.3) diperoleh penyelesaian persamaan Riccati adalah:

$Y(t) = 2t + 2t^2$

2.3 Bentuk Kuadratik

Bagian ini menjelaskan tentang bentuk kuadratik suatu matriks yang bersifat definit positif maupun definit negatif. Diawali dari bentuk kuadratik yaitu $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j dengan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan $i = j, j = n$ dan $c_{ij} \epsilon \mathbb{R}$. Sifat definit positif dan definit negatif dari bentuk kuadratik $x^T Ax$ dapat diperoleh , dengan menganalisa nilai eigen dari matriks A. Menurut (Lewis, 1995) Jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_{1,}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka sifat definit bentuk kudratik $x^T Ax$ memenuhi:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua i
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua i

3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua i
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua i.
5. Tidak definit jika $x^T Ax$ memiliki nilai positif maupun nilai negatif.

Contoh 2.2 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, akan ditentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 0$$
$$= 0$$

dari persamaan kuadrat diatas didapat: $\lambda_1 = 2$, dan $\lambda_2 = 1$, karena$\lambda_i > 0, i = 1,2$ maka dapat disimpulkan matriks diatas adalah matriks definit positif.

2.4 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Subbab yang kelima ini membahas tentang kendali optimal waktu kontinu, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu kontinu, kemudian dilanjutkan membahas tentang kendali lingkar tertutup linier kuadratik waktu berhingga satu kendali.

a. Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Diberikan persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu kontinu sistem dinamis untuk waktu *t* sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \tag{2.6}$$

Dengan $x(t) \epsilon R^n$ merupakan vektor state internal dan $u(t) \epsilon R^m$ merupakan vektor kendali input, dan diberikan fungsi tujuan yang meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan sebagai berikut:

$$J(t_0) = K\big(\boldsymbol{x}(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L\big((\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(t), t\big)dt, \tag{2.7}$$

Dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif, adapun persamaan itu adalah sebagai berikut:

Persamaan Hamilton: $H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t).$ (2.8)

Persamaan *state*: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u, t)(t)$ (2.9)

Persamaan *kostate*: $-\dot{\lambda(t)} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda(t) + \frac{\partial L(t)}{\partial x}$ (2.10)

Kondisi *stasioner*: $0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L(t)}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial u}\lambda(t)$ (2.11)

b. Kendali Optimal Kontinu Linier Kuadratik Waktu Berhingga Satu Kendali

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik, didefenisikan persamaan sistem linier untuk waktu t sebagai berikut:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$ (2.12)

Dengan $A \epsilon R^{n\times n}, B_i\, R^{n\times m},\;\; x(t)\epsilon\, R^n$ dan kendali input $u(t)\epsilon\, R^m$, dan diberikan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J(t_0) = \frac{1}{2}x^T(T_f)S(T_f)x(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f}(x^T\, Qx + u^T Ru)dt, \quad (2.13)$$

Dengan t_0 waktu awal T_f waktu akhir.

Diasumsikan Q dan $S(T_f)$ semi definitif positif, selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $x^{\mathrm{T}}Qx$ dan $x^{\mathrm{T}}\,(T_f)S(T_f)x(T_f)$ bernilai nonnegatif untuk setiap $x(t)$. Diasumsikan juga R adalah definitif positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $u^T Ru > 0$ untuk setiap $u(t) \neq 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan persamaan aljabar Riccati sekaligus vektor kendali yang diperlukan untuk meminimalkan fungsi tujuan. Berdasarkan Persamaan (2.12) dan Persamaan (2.13) diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

Persamaan Hamilton: $H(t) = \frac{1}{2}(x^T Q\mathbf{x} + u^T Ru) + \lambda^T(Ax + Bu).$ (2.14)

Persamaan *state*: $\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(Ax(\mathrm{t}) + Bu(\mathrm{t})).$ (2.15)

Persamaan *kostate*: $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = Qx(t) + A^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.16)

Kondisi *stasioner*: $0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = Ru(t) + B^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.17)

Berdasarkan Persamaan (2.17) diperoleh:

$$u(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t). \quad (2.18)$$

Selanjutnya, Persamaan (2.18) disubtitusikan ke Persamaan (2.15) maka diperoleh

$$\dot{x}(t) = Ax(\mathrm{t}) - BR^{-1}B^t\boldsymbol{\lambda}(t). \quad (2.19)$$

Diketahui t_0 dan $x(t0)$, waktu akhir T_f diketahui, state akhir $x(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\mathbf{x}\,(T_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu:

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial K}{\partial x}\ \Big|_{T_f} = S(T_f)x(T_f), \quad (2.20)$$

Untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diasumsikan $x(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.20) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)x(t), \quad (2.21)$$

Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.21) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}x + S\dot{x}$**.** Kemudian dari Persamaan (2.19) diperoleh:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}x + S\dot{x} = \dot{S}x + S(Ax - BR^{-1}B^TSx). \quad (2.22)$$

Dari Pesamaan (2.16) didapat $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Qx + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Qx - A^T\boldsymbol{\lambda}$ selanjutnya, subtitusikan Persamaan (2.22) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Qx - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh $-Qx - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}x + S(Ax - BR^{-1}B^TSx),$

$$-Qx - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}x + SAx - SBR^{-1}B^TSx),$$

$$-\dot{S}x = SAx - SBR^{-1}B^TSx + Qx + A^T\boldsymbol{\lambda},\ \text{dimana: } \boldsymbol{\lambda} = Sx$$

$$-\dot{S}x = SAx - SBR^{-1}B^TSx + Qx + A^TSx,$$

$$-\dot{S}x = (A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q)x, \quad (2.23)$$

Karena Persamaan (2.23) memenuhi untuk setiap waktu *t*, maka diperoleh:

$$-\dot{S} = A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q,\ \ t \le T_f. \quad (2.24)$$

Persamaan diatas disebut persamaan diferensial Riccati. Jika $S(t)$ adalah solusi dengan kondisi akhir $S(T_f)$, maka Persamaan (2.20) berlaku untuk setiap $0 \le T_f$, maka asumsi benar.

Karena solusi persamaan diferensial Riccati adalah S(t) dan $\lambda = Sx$, maka vector Kendali optimal yang diberikan dari Persamaan (2.18) yaitu $u(t) = -R^{-1}B^{T}\boldsymbol{\lambda}(t)$ menjadi:

$$u(t) = -R^{-1}B^{T}S(t)x(t). \tag{2.25}$$